

DOI: 10.16285/j.rsm.2019.1567

分段 Knothe 函数优化及其动态求参

郭旭炜, 杨晓琴, 柴双武

(太原理工大学 矿业工程学院, 山西 太原 030024)

摘 要: 为了解决分段 Knothe 函数在开采沉陷动态预计中时间影响系数 c 、地表最大下沉速度对应的下沉值 W_v 以及最大下沉速度对应时间点 τ 均为固定值的问题, 对分段 Knothe 函数中各参数进行了理论和试验分析。结合概率积分法理论知识, 推导出以时间为自变量的 3 个参数的函数关系, 并在此基础上对分段 Knothe 函数进行了优化, 得到一种预测精度更高、更具推广性的分段 Knothe 函数。试验结果表明: 优化的 Knothe 函数解决了优化前 Knothe 函数中 c 、 τ 、 W_v 为固定值的缺陷, 弥补了利用相似地质条件拟合出经验公式的不足。通过对比分析优化前后模型的预测结果, 得出优化模型中 τ 的预计结果保持在实测最大下沉速度时间范围内。优化后模型最大均方误差和相对中误差分别为 0.116 m、3.8%, 较优化前模型分别提高了 65.1%、51.9%, 进一步证实了该优化模型具备一定的实用性和可靠性。

关 键 词: Knothe 函数; 开采沉陷; 动态预计; 分段 Knothe 函数; 参数

中图分类号: TD803

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2020) 06-2091-08

Optimization of the segmented Knothe function and its dynamic parameter calculation

GUO Xu-wei, YANG Xiao-qin, CHAI Shuang-wu

(School of Mining Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

Abstract: To solve the problem that the influence coefficient (c) of the dynamic prediction time of mining subsidence, the subsidence value (W_v) and the time point (τ) at the maximum ground subsidence speed are set as fixed values, these parameters were theoretically and experimentally analyzed using segmented Knothe function. Based on the theoretical knowledge of the probability integral method, the functions of these three parameters were deduced by considering time as the independent variable. Then, the segmented Knothe function was optimized, which is showing better generalization performance and prediction accuracy. The experimental results reveal that the optimized Knothe function eliminates the defect that c , τ and W_v of the conventional one were set as fixed values, and compensates for the shortage in similar geological conditions were used to generate a fitted empirical formula. After comparing and analyzing the prediction results from the optimized and the conventional models, it was concluded that the predicted results in the optimization model remain within the time range of the measured maximum subsidence velocity. The maximum mean square error and relative mean error of the optimized model are 0.116 m and 3.8%, respectively, which are improved by 65.1% and 51.9% compared with the conventional model. It proves the superiority of this model.

Keywords: Knothe function; mining subsidence; dynamic predictions; segmented Knothe function; parameters

1 引 言

地下开采所引起的地表沉陷变形是一个复杂的随时间和空间变化的四维问题^[1-4], 通过对开采引起

的地表形变研究, 可实时精准地预测开采对地表及地表建筑物的损害程度。对开采引起的地表形变预计主要分为动态预计和静态预计两种, 其中静态预计有: 剖面函数法、典型曲面法、影响函数法、

收稿日期: 2019-09-11

修回日期: 2019-11-22

基金项目: 国家自然科学基金 (No.51504159); 山西省自然科学基金 (No.2016012002)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China(51504159) and the National Natural Science Foundation of Shanxi Province(2016012002).

第一作者简介: 郭旭炜, 男, 1994 年生, 硕士研究生, 主要从事测量数据处理及开采沉陷方面的研究。E-mail: 1260219108@qq.com

通讯作者: 杨晓琴, 女, 1978 年生, 博士, 讲师, 主要从事测量数据处理及开采沉陷方面的研究。E-mail: yangxiaolin@tyut.edu.cn

Boltzmann 函数模型^[5]等, 其中, 影响函数法由我国学者刘宝琛引入国内后, 便演化为概率积分法, 此后该方法在我国得到了广泛应用^[6]。这些方法只能表达地表下沉达到稳定后的状态, 并不能表达地表下沉过程, 更无法表示某一地面点的下沉过程。

动态预计采用的时间函数包括 Knothe 时间函数^[4]、正态分布时间函数^[7]、Richards 函数模型^[8]等。我国主要采用的动态时间函数为 Knothe 时间函数^[9], 该方法的主要思想是“某一时刻的地表下沉速度与地表最大下沉值之差成正比关系”^[2, 4, 10]。常占强等^[10]通过理论推导提出了分段 Knothe 函数, 该模型的缺陷为: 针对不同的矿区需要重新选择合理的时间影响系数 c , 并且将函数严格按照下沉时间的一半一分为二。沈震等^[3]针对常占强提出的分段 Knothe 函数进行了优化, 分析了最大下沉速度出现的时间以及 c 值的变化, 但都是通过局部实测数据拟合求取, 并不具备推广性质。张劲满^[11]、刘玉成^[12]、王一^[13]等都是采用了双参数的 Knothe 函数模型。这 3 种模型虽然也解决了参数固定的问题, 但对参数的求取同样采用经验公式以及拟合方法, 预计前需要通过相似地质条件的矿区下沉数据拟合求出参数, 推广性较差, 过程较繁琐。本文针对上述问题, 从理论和试验角度分析了分段 Knothe 函数的参数对地表变形影响的动态规律, 并结合概率积分法相关理论知识, 对分段 Knothe 函数参数求取进行了探讨, 进而对分段 Knothe 函数模型进行了优化。

2 分段 Knothe 函数

2.1 Knothe 函数

1952 年波兰学者 Knothe 以微分的形式描述了地下开采引起地表下沉的过程, 并提出了假设: 地表点的瞬间下沉速度正比于该点的瞬间下沉值与最大下沉值之差, 由此建立了以下方程描述地表点的下沉随时间变化的过程^[10]:

$$\frac{dW(t)}{dt} = c[W_0 - W(t)] \quad (1)$$

式中: c 为时间影响系数; W_0 为地表点的最大下沉值; $W(t)$ 为地表点在 t 时刻的瞬间下沉值。

需要注意的是: 式 (1) 中时间影响系数 c 为固定值。

令 $W(0) = 0$, 求得方程式 (1) 的解即为下沉时间函数的表达式:

$$W(t) = W_0(1 - e^{-ct}) \quad (2)$$

式 (2) 虽然可以描述地表下沉, 但其本身不完全符合地表移动的实际过程^[4, 7, 10, 14]。

2.2 分段 Knothe 函数

因为传统的时间函数在表达下沉速度和下沉加速度时存在缺陷, 所以常占强等^[10]通过分析地表点下沉过程, 将其分为两个阶段: 第 1 阶段为下沉速度由 0 到最大, 第 2 阶段为下沉速度由最大逐渐趋于 0 的过程。并通过 Knothe 函数的下沉速度公式, 来表示分段 Knothe 函数下沉速度公式的后半段。邓喀中等^[15]对采动过程中地表任意点下沉速度的分析指出: “地表下沉速度曲线可近似地看成对称分布”, 这样可对称地表示出分段 Knothe 函数下沉速度公式的前半段公式。如下式所示:

$$\left. \begin{aligned} V_1(t) &= \frac{1}{2}cW_0 e^{-c(\tau-t)} & 0 < t \leq \tau \\ V_2(t) &= \frac{1}{2}cW_0 e^{-c(t-\tau)} & \tau < t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由式 (3) 进行积分可推出下沉函数的表达式为

$$\left. \begin{aligned} W_1(t) &= \frac{1}{2}W_0[e^{-c(\tau-t)} - e^{-c\tau}] & 0 < t \leq \tau \\ W_2(t) &= \frac{1}{2}W_0[2 - e^{-c(t-\tau)} - e^{-c\tau}] & \tau < t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在式 (4) 中, 认为最大下沉速度出现的时间是下沉总时间的 1/2, 并且最大下沉速度出现时对应的下沉值为最大下沉值的 1/2, 且时间影响系数 c 为固定值。

3 优化后的分段 Knothe 函数

根据以上分析的不足, 以半无限开采为例, 利用概率积分法相关知识分别对时间影响系数 c 、分段依据的时间点 τ 、最大下沉速度对应的下沉值 W_v 进行了详细分析, 将其代入式 (4), 并考虑到启动时间 t_0 , 得出分段 Knothe 函数公式为

$$\left. \begin{aligned} W_1(x, t) &= 0 & t \leq t_0 \\ W_2(x, t) &= W_v[e^{-c(t)(\tau-t)} - e^{-c(t)\tau}] & t_0 < t \leq \tau \\ W_3(x, t) &= (W_0 - W_v)[2 - e^{-c(t)(t-\tau)} - e^{-c(t)\tau}] & \tau < t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: W_v 为最大下沉速度对应的下沉值; τ 为分段依据的时间点。

式 (5) 虽然符合地表下沉规律, 但预测下沉曲线较缓, 下沉时间较长。主要是因为代入实测数据后 $e^{-c(t)(\tau-t)} - e^{-c(t)\tau}$ 由 0 逼近 1 的速度慢, 且在 τ 时

刻与 1 的差值较大, $t > \tau$ 时同理。由于 W_v 不是严格等于最大下沉的 1/2, 所以此处的 2 并不合理。

针对以上问题, 将 e 的指数扩大 3 倍, 以及 $t > \tau$ 时的 2 变为 $W_0 / (W_0 - W_v)$ 即可解决。优化的分段 Knothe 函数模型为

$$\left. \begin{aligned} W_1(x, t) &= 0 & t \leq t_0 \\ W_2(x, t) &= W_v [e^{-3c(t)(\tau-t)} - e^{-3c(t)\tau}] & t_0 < t \leq \tau \\ W_3(x, t) &= (W_0 - W_v) [W - e^{-3c(t)(t-\tau)} - e^{-3c(t)\tau}] & \tau < t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $W = W_0 / (W_0 - W_v)$ 。

3 个参数均不为固定值。都与地表点位置、采动时间、采厚、影响半径、回采过程中推进速度等有关。参数的具体推导过程由式 (7) ~ (15) 给出。

建立半无限开采时间坐标系, 如图 1 所示。选择开切眼正上方地表点作为地面坐标轴 x 的原点 $x-o$, 纵坐标 $W(x, t)$ 为地表点在 t 时刻的下沉量。除此之外, 还建立了煤层坐标系, 其原点 $s-o$ 设在开切眼处的煤壁顶板, 横坐标 s 为开采距离, 与工作面推进时间 t 和平均推进速度 v 的关系为 $s=vt$ 。

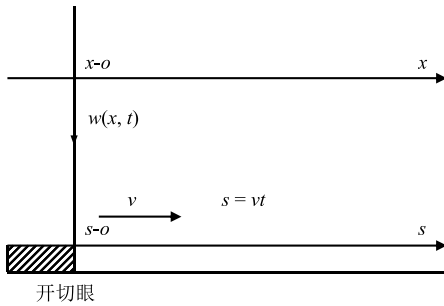


图 1 半无限开采时间坐标系
Fig.1 Coordinate system of time in semi-infinite mining process

3.1 τ 的计算

概率积分法计算半无限开采的计算公式为

$$W(x, t) = W_0 \int_{t_0}^t \frac{v_T}{r} e^{-\pi \frac{[v_T(t-t_0)-x]^2}{r^2}} dt = \frac{W_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{x}{r} \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{v_T(t-t_0)-x}{r} \right) \right] t \in [t_0, +\infty) \quad (7)$$

式中: x 为地面监测点坐标; r 为主要影响半径; v_T 为采空区推进速度; t_0 为启动时间; t 为开采时间。

$\operatorname{erf}(x)$ 为概率积分函数, 公式为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (8)$$

式中: u 为积分变量。

将式 (7) 对 t 求导可求出下沉速度 v_X 公式为

$$v_X(x, t) = \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \frac{W_0 v_T e^a}{r} \quad (9)$$

式中: $a = -\pi \frac{[v_T(t-t_0)-x]^2}{r^2}$ 。

将式 (9) 对 t 求导可求出下沉加速度 a_X 公式为

$$a_X(x, t) = \frac{\partial v_X(x, t)}{\partial t} = \frac{2W_0 v_T^2 \pi [x - v_T(t-t_0)] e^a}{r^3} \quad (10)$$

式中: $a = -\pi \frac{[v_T(t-t_0)-x]^2}{r^2}$ 。

令 $a(x, t) = 0$, 可求出最大下沉速度时的时间点 τ 为

$$\tau = \frac{x + v_T t_0}{v_T} \quad (11)$$

从式 (11) 可以看出, 最大下沉速度出现的时间点只与地表点位置、推进速度、启动时间有关。从图 2 中可知, 地表点下沉量与下沉速度最大时对应的时间点的分布关系。

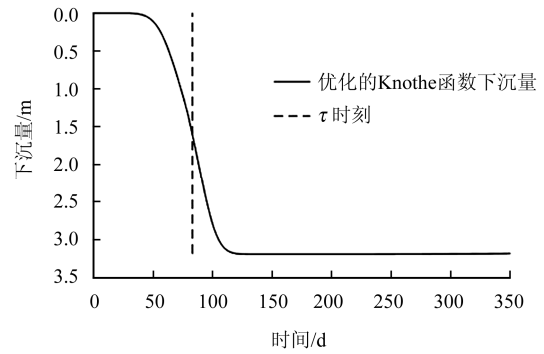


图 2 优化的 Knothe 函数下沉曲线与 τ 的位置
Fig.2 Optimized Knothe function sinking curve and the location of τ

3.2 最大下沉速度与最大下沉速度对应下沉值的计算

将式 (11) 代入式 (9) 中即可求出最大下沉速度:

$$v_{X \max} = \frac{v_T W_0}{r} \quad (12)$$

根据式 (12) 可发现, 最大下沉速度与开采推进速度和最大下沉量成正比, 与影响半径成反比。

将式 (11) 代入式 (7) 中即可求出最大下沉速

度时对应的下沉值为

$$W_{v_{x\max}} = \frac{W_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{x}{r} \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{x+b}{r} \right) \right] \quad (13)$$

$$\text{式中: } b = v_T \left(t_0 - \frac{x + t_0 v_T}{v_T} \right)。$$

通过查阅概率积分表可发现, 当 $x = r$ 时的下沉量为 $0.006\ 2W_0$, 而当 $x = 1.3r$ 的下沉量只有 $0.000\ 6W_0$ (其下沉量为一微量, 可忽略不计), 因此, 可认为此时达到了充分采动。采用实例 1 中的参数 (影响半径 $r = 115\ \text{m}$, $1.3r = 149.5\ \text{m}$) 绘制式 (13) 的变化曲线, 结果如图 3(a) 所示, 随着地面点到开切眼距离越远, 最大下沉速度对应下沉量逐渐增大。为更加明显的观测变化趋势, 绘制距离开切眼 $110 \sim 200\ \text{m}$ 区间内的比值图像, 如图 3(b) 所示。在图中可以发现, 距离开切眼 $150\ \text{m}$ 处最大下沉速度对应的下沉量与该点的最大下沉量比值大于 $0.499\ 7$, 则可认为达到了该点位最大下沉的 $1/2$ 。由此可知, 在充分采动前, 最大下沉速度对应的下沉量相对于该点位最大下沉量处于持续增加状态, 当达到充分采动后, 两者的比值稳定在 $1/2$ 。

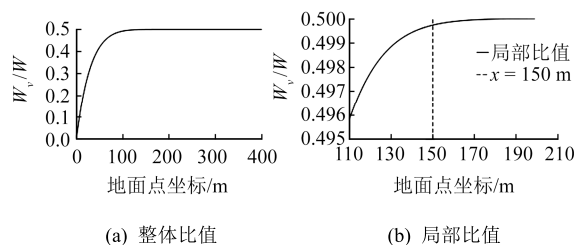


图 3 不同点位最大下沉速度对应的下沉量与该点的最大下沉量的比值

Fig.3 The ratio of the subsidence corresponding to the maximum subsidence velocity at different points, and to the maximum subsidence at this point

3.3 动态 c 值的计算

崔希民等^[4]已经论证了采用 Knothe 函数描述地表下沉是可行的, 因此, 将 Knothe 函数进行变形, 再结合概率积分法的相关理论知识便可求出在任意地表点位、任意时刻时间影响系数 c 值。其计算方法为

$$c = \frac{-\ln \left(1 - \frac{W(t)}{W_0} \right)}{t} = \frac{-\ln \left(1 - \frac{a_1 + b_1}{2} \right)}{t} \quad (14)$$

$$\text{式中: } a_1 = \operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{x}{r} \right); \quad b_1 = \operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{v_T (t - t_0) - x}{r} \right)。$$

但由于对数函数的特殊性质: 函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 因此, 当 $W(t)$ 达到最大下沉值的时候会有 $W(t) = W_0$, 此时 $\ln(0)$ 并不成立。根据求极限的思想, 将对数函数中的 1 取为: $1 + 1 \times 10^{-10}$ 。则 c 值的表达式为

$$c = \frac{-\ln \left[\left(1 + 1 \times 10^{-10} \right) - \frac{w(t)}{w_0} \right]}{t} \quad (15)$$

求出的 c 值图像与正态分布图像类似。并且该结论对比与魏涛等^[16]通过实测数据拟合插值的结果, 更加证明了理论推导的正确性, c 值在某一地表点随时间的变化如图 4 所示。

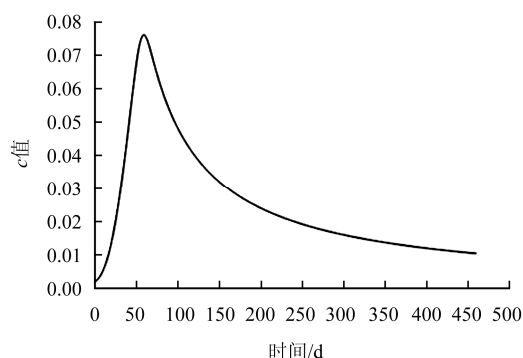


图 4 参数 c 的变化

Fig.4 Variation of the parameter c

4 应用分析

为验证优化后模型的实用性, 采用优化前后的两种模型对两个不同矿区分别进行预计, 将测量数据与预测数据进行对比分析, 更直接地验证了优化后函数模型的可靠性。

4.1 实例 1

以山西某煤矿为例, 该煤矿开采区域长为 $1\ \text{km}$, 开采速度约为 $4\ \text{m/d}$ 。煤层厚度为 $5.3 \sim 5.7\ \text{m}$, 平均厚度为 $5.5\ \text{m}$ 。采空区上方布设有天然气管道, 为监测开采对管道的影响, 在管道拐点处设有监测点, 其点位布设与采空区位置关系如图 5 所示。

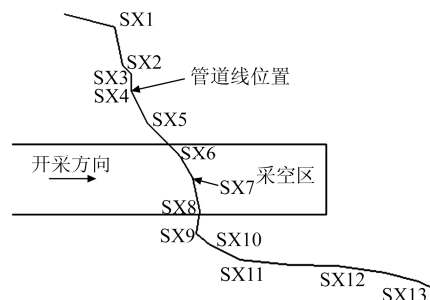


图 5 采空区地表点位分布

Fig.5 Distribution of surface points in goaf

根据点位布置情况,由于 SX7 号点位于采空区中央,因此,采用 SX7 点进行预测,相关参数见表 1。根据参数绘制出 c 值曲线图以及实际下沉值与优化后的 Knothe 函数模型预测对比如图 6、7 所示,其中原 Knothe 函数 c 值取 0.05。

表 1 地表沉降动态参数表

Table 1 Dynamic parameters of surface subsidence

x/m	$v_T/(m \cdot d^{-1})$	Z_1/d	r/m	M/m	q	$\theta/(^\circ)$	t_0/d
400	4	460	115	5.5	0.8	5	24

注: Z_1 为预计总时间; M 为开采厚度; q 为下沉系数; θ 为煤层倾角。

在本次下沉预测中,结合下沉曲线可发现 c 值的变化是从地表点产生下沉以后开始的,并且整体近似于正态分布。图 7 显示了两种模型最大下沉速度时间点的预计结果,优化后的时间点根据式 (11) 可计算出 $\tau = 133$ d。根据实测数据可知,24 d 时下沉量为 0.018 m,252 d 时下沉量为 4.357 m,此后该点趋于稳定,可认为下沉时间区间为 24~252 d,取其中间值 138 d 为优化前模型的最大下沉速度时间点。根据表 2 可计算出最大下沉速度出现的时间区间在 115~134 d。本文中模型计算出的时间点处于该时间区间内,因此,该点预测的 τ 值是可靠的。

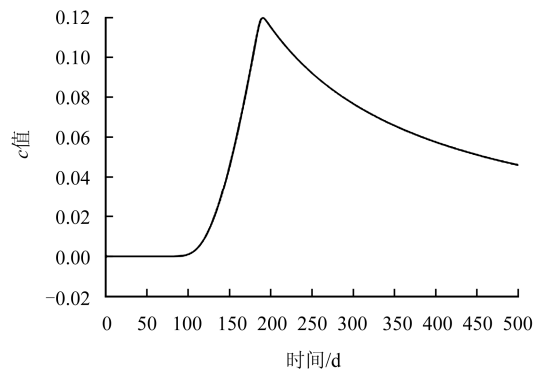
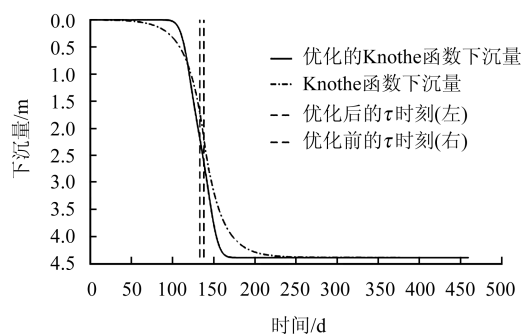
表 2 SX7 下沉实测值与预测值对比表

Table 2 Comparison between measured and predicted data of subsidence at point SX7

时间	实测值/m	优化的 Knothe 函数模型				Knothe 函数模型			
		预测值/m	d^2/m^2	m/m	$f/\%$	预测值/m	d^2/m^2	m/m	$f/\%$
0	0.000 0	0.000 0	0.000 000			0.000 000	0.000 000		
24	0.018 0	0.000 0	0.000 324			0.005 124	0.000 166		
61	0.032 0	0.000 0	0.001 024			0.044 430	0.000 155		
77	0.055 0	0.000 0	0.003 025			0.101 600	0.002 172		
115	0.350 3	0.547 7	0.038 967			0.691 700	0.116 553		
134	2.568 0	2.266 0	0.091 204			1.792 000	0.602 176		
154	4.114 0	4.046 0	0.004 624	0.116	2.6	3.396 000	0.515 524	0.332	7.6
172	4.254 0	4.380 0	0.015 876			3.981 000	0.074 529		
186	4.314 0	4.383 0	0.004 761			4.182 000	0.017 424		
252	4.357 0	4.383 0	0.000 676			4.374 000	0.000 289		
323	4.356 0	4.383 0	0.000 729			4.381 000	0.000 625		
391	4.391 0	4.383 0	0.000 064			4.381 000	0.000 100		
443	4.370 0	4.383 0	0.000 169			4.381 000	0.000 121		

注: 当预测值小于 10^{-5} 时,可认为是 0。

为进一步证实预测结果的可靠性与准确性,将本文中的预测模型结果与优化前 Knothe 函数模型的预测结果进行误差对比分析,两种方法预测下沉曲线结果如图 8 所示,并采用均方误差 m 和相对误差 f 作为衡量两种方法预测结果与实测结果差值的标准,采用式 (16)、(17) 分别计算均方误差和相对误差。表 2 列出了 SX7 点在不同时刻实际下沉值

图 6 参数 c 的变化Fig.6 Variation of the parameter c 图 7 τ 的分布Fig.7 Distribution of τ

和相应时刻的预计下沉值以及两值差值的平方、均方误差、相对误差。

$$m = \pm \sqrt{\frac{[dd]}{n-1}} \quad (16)$$

$$f = \frac{|m|}{W_0} \times 100\% \quad (17)$$

式中: d 为地面观测点预测下沉值与实测下沉值之差; n 为误差个数。

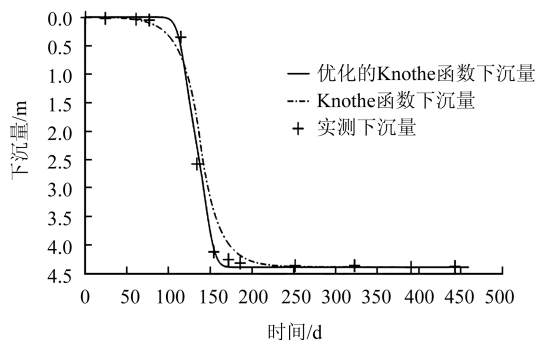


图8 两种模型下沉曲线

Fig.8 Subsidence curves of both models

通过表2可知,两种模型的预测对比中,本文模型预测结果的均方误差为0.116 m,优化前的Knothe函数模型预测结果的均方误差为0.332 m。本文模型预测结果的相对中误差为2.6%,优化前模型预测结果的相对中误差为7.6%。由此可见,将模型参数时间化,不仅可以解决参数拟合的问题,而且可以一定程度提高预测精度。

4.2 实例2

某煤矿2038工作面走向为980 m,倾斜长为165 m,煤层倾角为 9° ,开采厚度为3 m,日平均推进速度为4~5 m(本次预计推进速度取平均值4.5 m/d),开采深度为465 m,主要影响半径为210 m,下沉系数为0.54,原Knothe函数 c 取0.03。为验证本文模型的准确性,分别对走向线23号点($x=455$ m)、34号点($x=636$ m)进行预计,并与实测下沉数据进行对比分析。

优化前后Knothe函数模型预计结果对比曲线以及两模型预计结果与实测下沉值的误差分析见图9、10与表3。

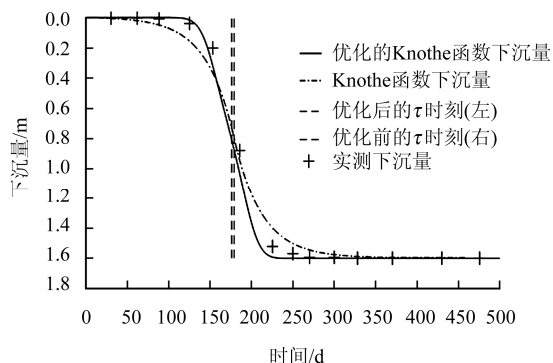


图9 23号点不同模型下沉曲线

Fig.9 Subsidence curves of different models at the 23rd point

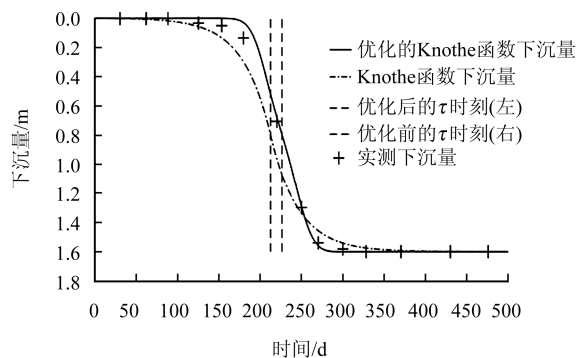


图10 34号点不同模型下沉曲线

Fig.10 Subsidence curves of different models at the 34th point

表3 两种模型误差对比

Table 3 Comparison of errors of both models			
模型	点号	均方误差/m	相对中误差/%
优化的 Knothe 模型	23	0.060	3.8
	34	0.033	2.1
Knothe 模型	23	0.070	4.4
	34	0.126	7.9

根据实测数据分析:23号点最大下沉速度出现的时间区间为153~186 d。优化前后模型计算出的时间分别为179 d和176 d,都在区间内。34号点最大下沉速度出现的时间区间为220~250 d。优化前后模型计算出的时间分别为212 d和226 d,优化前的模型略微偏出了最大下沉速度区间。

通过对比分析不同矿区,不同模型的预计结果,证明优化后的Knothe函数模型可以很好地描述由开采引起的地表随时间变化的动态过程,更加充分地说明采用该模型预测地表下沉具有一定适用性、可靠性。

5 结 论

(1)在分段Knothe函数中,分析了 c 、 τ 、 W_v 随时间 t 的变化规律:同一地表点从刚开始下沉到开采结束 c 值都是不断变化的,其变化图像类似于正态分布;最大下沉速度出现的时间 τ 并不是严格等于下沉时间的1/2;最大下沉速度对应的下沉量 W_v 在未达到充分采动前,其下沉量与该点最大下沉值的比值随着地表点向开采方向推进逐渐增大,达到充分采动后,为最大下沉值的1/2。

(2)通过对 c 、 τ 、 W_v 参数的推导,对分段Knothe函数预计模型进行了优化,该模型具备一定普遍性,除概率积分法参数外,不再依赖通过相似地质条件拟合求取的经验函数。

(3)通过对比矿区的实测数据和优化前模型的

预测结果,表明优化模型中 τ 的预计结果保持在实测最大下沉速度时间范围内,且3次预计的最大均方误差为0.116 m、最大相对中误差为3.8%;优化前模型的最大均方误差为0.332 m、最大相对中误差为7.9%,优化模型精度较优化前提高了2~3倍。进一步证实优化模型具备一定的实用性和可靠性。

参考文献

- [1] 吴侃,葛家新,王玲丁,等. 开采沉陷预计一体化方法[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1995.
WU Kan, GE Jia-xin, WANG Ling-ding, et al. Integrated method of mining subsidence prediction[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 1995.
- [2] 胡青峰,崔希民,康新亮,等. Knothe 时间函数参数影响分析及求参模型研究[J]. 采矿与安全工程学报, 2014, 31(1): 122-126.
HU Qing-feng, CUI Xi-min, KANG Xin-liang, et al. Impact of parameter on Knothe time function and its calculation model[J]. **Journal of Mining & Safety Engineering**, 2014, 31(1): 122-126.
- [3] 沈震,徐良骥,郭辉,等. 一种改进的开采沉陷动态下沉模型[J]. 测绘科学, 2016, 41(12): 238-242.
SHEN Zhen, XU Liang-ji, GUO Hui, et al. An improved dynamic deformation model of mining subsidence[J]. **Science of Surveying and Mapping**, 2016, 41(12): 238-242.
- [4] 崔希民,缪协兴,赵英利,等. 论地表移动过程的时间函数[J]. 煤炭学报, 1999, 24(5): 453-456.
CUI Xi-min, MIAO Xie-xing, ZHAO Ying-li, et al. Discussion on the time function of time dependent surface movement[J]. **Journal of China Coal Society**, 1999, 24(5): 453-456.
- [5] 王宁,吴侃,刘锦,等. 基于 Boltzmann 函数的开采沉陷预测模型[J]. 煤炭学报, 2013, 38(8): 1352-1356.
WANG Ning, WU Kan, LIU Jin, et al. Model for mining subsidence prediction based on Boltzmann function[J]. **Journal of China Coal Society**, 2013, 38(8): 1352-1356.
- [6] 郭增长,柴华彬. 煤矿开采沉陷学[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 2013.
GUO Zeng-zhang, CHAI Hua-bin. Subsidence of coal mining[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing Home, 2013.
- [7] 张兵,崔希民,胡青峰. 开采沉陷动态预计的正态分布时间函数模型研究[J]. 煤炭科学技术, 2016, 44(4): 140-145, 174.
ZHANG Bing, CUI Xi-min, HU Qing-feng. Study on normal distributed time function model to dynamically predict mining subsidence[J]. **Coal Science and Technology**, 2016, 44(4): 140-145, 174.
- [8] 王正帅,邓喀中. 采动区地表动态沉降预测的 Richards 模型[J]. 岩土力学, 2011, 32(6): 1664-1668.
WANG Zheng-shuai, DENG Ka-zhong. Richards model of surface dynamic subsidence prediction in mining area[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(6): 1664-1668.
- [9] 张兵,崔希民. 开采沉陷动态预计的分段 Knothe 时间函数模型优化[J]. 岩土力学, 2017, 38(2): 541-548, 556.
ZHANG Bing, CUI Xi-min. Optimization of segmented Knothe time function model for dynamic prediction of mining subsidence[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(2): 541-548, 556.
- [10] 常占强,王金庄. 关于地表点下沉时间函数的研究——改进的克诺特时间函数[J]. 岩石力学与工程学报, 2003, 22(9): 1496-1499.
CHANG Zhan-qiang, WANG Jin-zhuang. Study on time function of surface subsidence: the improved Knothe time function[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2003, 22(9): 1496-1499.
- [11] 张劲满,徐良骥,李杰卫,等. 开采沉陷动态下沉模型及其参数研究[J]. 金属矿山, 2017, 51(10): 12-15.
ZHANG Jin-man, XU Liang-ji, LI Jie-wei, et al. Study on dynamic subsidence model of mining subsidence and its parameters[J]. **Mental Mine**, 2017, 51(10): 12-15.
- [12] 刘玉成,庄艳华. 地下采矿引起的地表下沉的动态过程模型[J]. 岩土力学, 2009, 30(11): 3406-3410.
LIU Yu-cheng, ZHUANG Yan-hua. Model for dynamic process of ground surface subsidence due to underground mining[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2009, 30(11): 3406-3410.
- [13] 王一,张凯. 采动地表动态下沉的时间函数模型研究[J]. 煤矿开采, 2017, 22(5): 68-70.
WANG Yi, ZHANG Kai. Study of time function model of surface subsidence dynamic under mining[J]. **Coal Mining Technology**, 2017, 22(5): 68-70.